1.2. Формы представления модели

Традиционными формами представления моделей являются системы уравнений в нормальной форме Коши и нелинейные дифференциальные уравнения, графы, структурные схемы. Они позволяют описывать не иерархические модели.

1.2.1. Нормальная форма Коши

Единообразное по форме и удобное для использования матричного аппарата математическое описание динамических (обычно «гладких») систем достигается в пространстве состояний с использованием переменных состояния, т. е. уравнений в форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $t \in \mathbf{R}^1$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^r$ — векторы переменных состояния, управления и выходов; $\mathbf{R}^{(\cdot)}$ — $(\cdot)$-мерное евклидово пространство; $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $\mathbf{h}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^r$ — гладкие отображения. Предполагается выполнение условия существования решений, а для большинства практических задач — их единственности. Условия существования и единственности решений выполняются, если $\mathbf{u}(t)$ принадлежит одному из следующих наиболее часто используемых классов функций: постоянные, кусочно-постоянные, кусочно-непрерывные, кусочно-гладкие, измеримые (локально-ограниченные), а функция $\mathbf{f}(t)$ — удовлетворяет условиям Коши-Липшица

В работе [4] приводится классификация форм представления динамических моделей в терминах «вход-состояние-выход», являющихся частными случаями (1.1).

Билинейные системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{A} + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\mathbf{B}_i\right)\mathbf{x}(t),$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

где $u_i(t)$ — скалярные функции, $\mathbf{A}, \mathbf{B}_i$ — числовые матрицы размеров $n \times n$, $\mathbf{C}$ — числовая матрица размера $r \times n$.

L-системы

L-системой называется автономная невырожденная система вида

$$\dot{x}^i(t) = f_j^i(\mathbf{x})u^j, \quad i, j = \overline{1,n},$$

где $u \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^n$, причем

$$[F_i, F_j] = C_{ij}^k F_k, \;\; F_j = f_j^i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x^i}, \;\; C_{ij}^k = \text{const}, \;\; \left|f_j^i\right| \neq 0.$$

Здесь $[\cdot,\cdot]$ является коммутатором алгебры Ли соответствующего векторного поля.

Линейные системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

которые приводятся к L-системам $(n+1)$-го порядка вида

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^0 \\ \dot{x}^1 \\ \vdots \\ \dot{x}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_j^1 x^j & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_j^n x^j & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ \sum_{k=1}^{m} b_k^1 u^k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} b_k^n u^k \end{pmatrix}.$$

Линейно-аналитические системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{u}(\mathbf{t})\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)),$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)).$$

Если $\mathbf{f}(\cdot)$, $\mathbf{g}(\cdot)$, $\mathbf{h}(\cdot)$ — полиномы, то система называется *полиномиальной* [132, 141, 161].

Системы с управлением, входящим линейно (правоинвариантные, аффинные) (векторное представление)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\mathbf{B}_i(\mathbf{x}(t)),$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)).$$

Системы управления с функциональными коэффициентами при переменных состояния и управления (матричное представление)

В ряде работ [43, 51, 52] принимается следующее описание в векторно-матричной записи

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u},$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{u}.$$

Переход от векторного к матричному представлению осуществляется с помощью интегрального преобразования [11]

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{f}_{\theta x}(\theta\mathbf{x})d\theta,$$

где $\mathbf{f}_{\theta x}(\theta\mathbf{x})$ — матрица Якоби, найденная по $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ из (1.12б).

Нормальная форма Коши (НФК) удобна для представления модели в алгоритмах явного типа, и позволяет широко применять богатую матричную арифметику современных пакетов программ и библиотек языков программирования [1, 72, 86, 92, 96, 108].

К недостаткам данной формы представления необходимо отнести то, что в ней не сохраняется информации о топологии модели.

1.2.2. Системы нелинейных дифференциальных уравнений различных порядков

Системы нелинейных дифференциальных уравнений (СНДУ) являются широко используемой формой представления нелинейных систем управления для численного исследования. В общем виде модель в форме СНДУ записывается следующим образом:

$$\varphi_i(x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(q_1)}, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \ldots, x_n^{(q_1)},$$
$$f_1, \dot{f}_1, \ldots, f_1^{(p_1)}, \ldots, f_m, \dot{f}_m, \ldots, f_m^{(p_1)}) = 0,$$
$$i = \overline{1, n};$$

начальные условия:
$$x_1(0) = x_{1_0}, \ldots, x_{1_{(0)}}^{(q_1)} = x_{1_0}^{(q_1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n(0) = x_{n_0}, \ldots, x_{n_{(0)}}^{(q_1)} = x_{n_0}^{(q_1)}$$

где: $f_j, f_j^{P_j},\ j \in \overline{1, m}$ - внешние воздействия и их производные,

$x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(q_i)},\ i \in \overline{1, n}$ - внутренние переменные, включая выходные и их производные.

Данная форма представления более характерна пакетам программ, предполагающим значительные преобразования модели, например трансляцию модели в функцию языка программирования и присоединение ее к расчетной части при построении расчетной задачи. Это снимает почти все ограничения на сложность модели, которая по сути дела программируется. В форме СНДУ можно представлять более широкий класс моделей чем в НФК.

Недостатком данной формы представления является, так же как и в случае НФК, отсутствие полной информации о структуре модели, что затрудняет решение многих задач топологического характера. Решение этой проблемы возможно при упорядочивании порядка следования уравнений, так что в *i*-ом уравнении переменная x_i являлась следствием. Такой подход встречается в ряде работ, например первые версии пакета NOCSYD [A2, A3].

1.2.3. Графы

Использование теории графов для описания моделей систем управления со сложной структурой, стало распространенным в последнее время. Теоретико-графовая форма описания модели позволяет эффективно использовать новые возможности языков программирования, такие как указатели, списки, классы, множественное наследие. Представление в форме ориентированного (сигнального) графа, в частности структурной схемы, расширяет информацию о модели, по сравнению с НФК и СНДУ, позволяя вводить причинно-следственные отношения. Знание о направленности связей имеет большое значение для задач анализа и синтеза.

В качестве иллюстрации на рис. 1.1. приведена диаграмма графа модели странного аттрактора Лоренца [93]. Эта форма представления позволяет эффективнее решать задачи выделения путей и контуров, связности, структурной управляемости и многие другие, чем в форме НФК и отчасти СНДУ.

Модель системы представляется ориентированным графом *H=<G,H>* с множеством переменных *X=x1, ... , xn, N* - общее множество вершин, и множеством дуг G - упорядоченных пар номеров смежных вершин (i,j), *G=(i,j)1, ... (i,j)n*. Общее количество таких пар обозначено в примерах как Q.

Несмотря на всю компактность и удобство такой записи, на практике чаще используют матрицу смежности R = r_{ij}, показывающую наличие дуги между i-ой и j-ой вершинами.

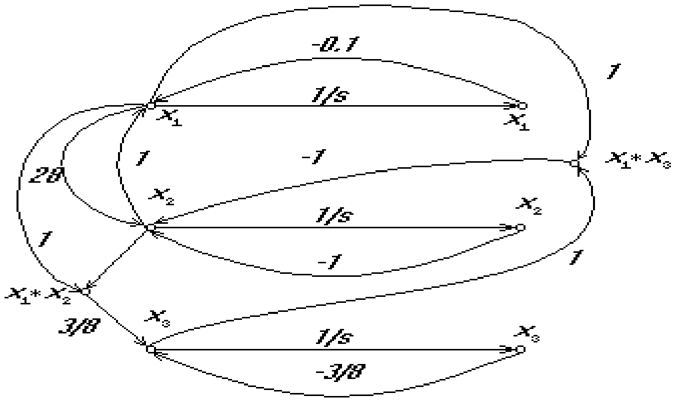


Рис. 1.1. Модель странного аттрактора в форме ориентированного графа

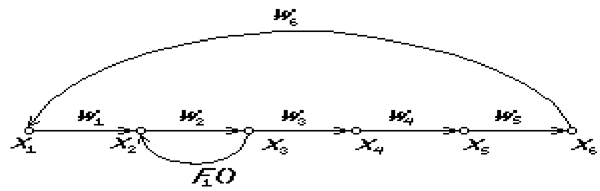


Рис. 1.2. Модель системы в форме графа

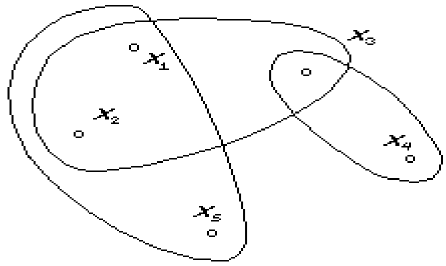
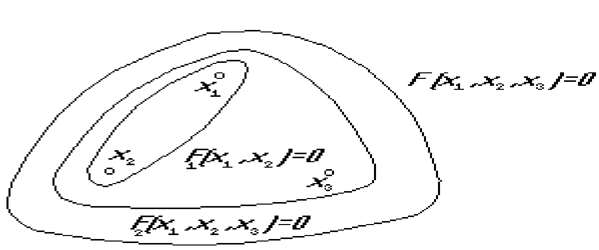


Рис. 1.3. Модель системы в форме гиперграфа



$F(x_1, x_2) = x_1 + 10.0*(x_1 - x_2)$

$F(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_1*x_2 - 28\,x_1 + x_2$

$F(x_1, x_2, x_3) = x_3 - x_1*x_2 + 2.6*x_3$

Рис. 1.4. Модель странного аттрактора в форме гиперграфа

Другим способом представления топологии является матрица изоморфности **D**, в строках которой представлены номера входящих (с плюсом) и выходящих (с минусом) дуг.

Для приведенного на рис. 1.2 примера матрицы смежности и изоморфности имеют вид:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{vmatrix} +6 & -1 \\ +1,+7 & -2 \\ +2 & -3,-7 \\ +3 & -4 \\ +4 & -5 \\ +5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Избыточность хранимой информации в матрице смежности (нулевые значения) компенсируются простотой вычислительных алгоритмов и скоростью получения требуемой информации из матрицы. Кроме того, наличие только двух значений 0 или 1, дает возможность использовать для ее представления битовые поля, что дает значительную экономию памяти, и при размерах системы порядка 100 элементов не уступает по затратам ресурсов на хранение матрицы изоморфности, при значительно более простых алгоритмов обработки информации. Использование матриц смежности, инцидентностей, достижимостей и др. имеет большое применение для алгоритмов топологического анализа СС НСУ [107].

Ориентированные графы (структурные схемы) обычно широко используются при описании линейных систем и систем с одновходовыми нелинейностями. Однако возникают некоторые затруднения при описании нелинейных систем, где нелинейные функции могут зависеть от нескольких переменных, например при описании операций умножения и деления.

1.2.4. Гиперграфы

Гиперграф являются теоретико-множественной формой представления дифференциальных уравнений, заданных в общем случае непричинно—следственным способом [53, 54, 56, 73]. По сравнению с графом, представление модели в форме гиперграфа расширяет возможности представления многовходовых элементов, однако при этом теряется информация о направленности связей.

Гиперграф определяется как пара *H* = < *X, E* > образующая конечное множество *X=x1,...,xn* вершин и некоторое семейством *E=e1,...,eq* ребер - непустых частей X, удовлетворяющих условию *UE=X* [67]. Одним из способов задания топологии гиперграфа [53], является матрица $\mathbf{R}_H = \left\| r_{ij} \right\|$, где

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \in e_j, \\ 0, \text{ если } x_i \notin e_j. \end{cases}$$

Гиперграф является вариантом симплециального комплекса или симплециальной схемы. В ряде работ [75], вводится понятие ориентированного гиперграфа. При этом множество *E* - определяется как множество ориентированных ребер.

Примеры гиперграфов приведены на рис. 1.5 и рис. 1.6. Из диаграмм видно, что гиперграф является способом группирования зависимых переменных, без указания причинно-следственных отношений между ними.

При этом способе внутреннего представления модели в ЭВМ, также возникают проблемы при внешнем представлении Скорее можно предлагать автоматическое построение гиперграфа по введенной системе уравнений.