Лекция №8. Теоретико-множественное описание систем

Вводятся основные понятия теории систем на теоретико-множественном уровне и устанавливаются взаимосвязи между ними. Система определяется прежде всего как некоторое отношение на абстрактных множествах, а затем дается оценивание временных и динамических систем как систем на множествах абстрактных функций времени. Для того чтобы иметь возможность определять системы различных типов более конкретно, вводятся вспомогательные функции и объекты, такие, как состояние, глобальное состояние, глобальная реакция системы.

Предположения о характере функционирования систем

Желая получить математическую модель процесса функционирования системы, чтобы она охватывала широкий класс реальных объектов, в общей теории систем исходят из общих предположений о характере функционирования системы:

1) система функционирует во времени; в каждый момент времени система может находиться в одном из возможных состояний;

2) на вход системы могут поступать входные сигналы;

3) система способна выдавать выходные сигналы;

4) состояние системы в данный момент времени определяется предыдущими состояниями и входными сигналами, поступившими в данный момент времени и ранее;

5) выходной сигнал в данный момент времени определяется состояниями системы и входными сигналами, относящимися к данному и предшествующим моментам времени.

Первое из перечисленных предположений отражает динамичен кий характер процесса функционирования в пространстве и времени. При этом процесс функционирования протекает как последовательная смена состояний системы под действием внешних, и внутренних причин.

Второе и третье предположения отражают взаимодействие системы с внешней средой.

В четвертом и пятом предположениях отражается реакция системы на внутренние факторы и воздействия внешней среды:

последействие и принцип физической реализуемости. Многим явлениям и процессам свойственно последействие, вследствие которого тенденции, определяющие поведение системы в будущем, зависят не только от того, в каком состоянии находится система в настоящий момент времени, но в той или иной степени от ее поведения в предыдущие моменты времени (например, усвоение студентом сложных дисциплин — теории систем, теории построения АСУ, исследования операций, теории массового обслуживания и др. — зависит от степени усвоения курса теории вероятностей и математической статистики, а еще дальше — от знания курса высшей математики).

Принцип физической реализуемости заключается в следующем: система не реагирует в данный момент времени на «будущие» факторы и воздействия внешней среды.

Система, как отношение на абстрактных множествах

Одним из центральных понятий теории систем является понятие системы, определенное в теоретико-множественных терминах:

$$S \subset \otimes\{V_i, i \in I\}$$

где *V,* — вес компоненты; $i \in I$ — декартова произведения $\otimes V_i$, называемые объектами системы *S; I* — множество индексов. В кибернетике наибольший интерес представляют системы с двумя объектами — входным объектом *X* и выходным объектом *Y:*

$$S \subset X \otimes Y$$

Основными причинами определения системы как теоретико-множественного отношения являются следующие:

1. Система определяется в терминах ее наблюдаемых свойств или, точнее говоря, в терминах взаимосвязей между этими свойствами, а не тем, что они на самом деле собой представляют (т. е. не с помощью физических, химических, биологических, социальных или других явлений). Это вполне согласуется с природой системных исследований, направленных на выяснение организации и взаимосвязи элементов системы, а не на изучение конкретных механизмов в системе.

2. Определение системы как отношения вида (3.1) является предельно общим. Конечно, различным системам отвечают и различные способы задания описания (дифференциальные уравнения, булева алгебра, графы и т. д.), но все они есть не более чем отношения вида (3.1). В условиях предельно нечеткой информации, когда систему удается описать лишь качественно, все словесные утверждения в силу их лингвистических функций определяют отношения типа (3.1). Действительно, каждое высказывание содержит две основные лингвистические категории: термы (денотаты) и функторы. Напомним, что термы используются для обозначения объектов, а функторы — для обозначения отношения между ними. И для каждого правильного множества словесных утверждений существует отношение (в математическом смысле слова), описывающее формальную взаимосвязь между объектами. Таким образом, система всегда является отношением в смысле (3.1), а уже более узкие классы систем определяются более точно своими специфическими средствами.

3. Системы часто задаются с помощью некоторых уравнений относительно соответствующих переменных. Каждой такой переменной можно поставить в соответствие некоторый объект системы, описывающей область значений соответствующей переменной. Утверждая, что система описывается системой уравнений относительно некоторого множества переменных, в сущности считают, что система есть отношение над соответствующими объектами, порожденными этими переменными (по одному объекту на каждую переменную, область значений которой он представляет). При этом любая комбинация элементов этих объектов, принадлежащая этому отношению, удовлетворяет исходной системе уравнений.

Под отношением понимается подмножество конечной декартовой степени $A^n = A \times A \times ... \times A$ данного множества *A,* т. е. подмножество систем $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из n элементов множества *A.*

Подмножество $R \subset A^n$ называется n-местным или n-арным отношением в множестве *A.* Число n называется рангом или типом отношения *R.* Множество всех n-арных отношений в множестве *A* относительно операций $\cup$ и $\cap$ является булевой алгеброй.

Для построения теории систем на теоретико-множественном уровне, исходя из определения (3.1), необходимо наделить систему как отношение некоторой дополнительной структурой. Это можно сделать двумя способами:

ввести дополнительную структуру для элементов объектов системы; например, рассматривать сам элемент $v_i, \in V_i$ как некоторое множество с подходящей структурой;

ввести структуру непосредственно для самих объектов системы $V_i, i \in I$.

Первый способ приводит к понятию (абстрактных) временных систем, а второй — к понятию алгебраических систем.

Временные, алгебраические и функциональные системы

Временные системы. Если элементы одного из объектов системы есть функции, например v: $T_v \to A_v$ то этот объект называют функциональным. В случае, когда области определения всех функций для данного объекта *V* одинаковы, т. е. каждая функция $v \in V$ является отображением *T* в *A,* $v : T \to A$, то *T* называется индексирующим множеством для v, а *A* — алфавитом объекта *T.* Если индексирующее множество линейно упорядочено, то его называют множеством моментов времени. Функции, определенные на множествах моментов времени, принято называть (абстрактными) функциями времени. Объект, элементами которого являются временные функции, называют временным объектом, а системы, определенные на временных объектах, — временными системами.

Особый интерес для исследования представляют системы, у которых элементы и входного и выходного объектов определены на одном и том же множестве: $X \subset A^T$ и $Y \subset B^T$. В этом случае под системой понимается отношение

$$S \subset A^T * B^T$$

Алгебраические системы. Другой путь наделения объектов системы математическими структурами состоит в определении одной или нескольких операций, относительно которых V становится алгеброй. В самом простейшем случае определяется бинарная операция $R : V*V \to V$ и предполагается, что в V можно выделить такое подмножество W, зачастую конечное, что любой элемент $v \in V$ можно получить в результате применения операции R к элементам из W или к элементам, уже построенным из элементов множества Неподобным образом. В этом случае W называют множеством производящих элементов или алфавитом объекта, а его элементы — символами, а элементы объекта V — словами. Если R есть операция сочленения, то слова — это просто последовательности элементов алфавита W.

Необходимо иметь в виду, что алфавит временного объекта — это не совсем то же самое, что алфавит алгебраического объекта. Для объектов с конечными алфавитами — это обычно одни и те же множества. Но как только алфавит становится бесконечным, возникают трудности: множество производящих элементов и область функций времени оказываются различными множествами, в общем случае даже разной мощности.

Итак, системой называется отношение на непустых (абстрактных) множествах:

$$S \subset x\{V_{i,}\ i \in I\}.$$

Если множество индексов / конечно, то выражение (3.1) можно переписать в виде

$$S \subset V_1 * V_2 * \ldots * V_{n.} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Пусть $I_x \subset I$ и $I_y \subset I$ образуют разбиение множества I, т. е. пусть $I_x \cap I_y = \varnothing$ и $I_x \cup I_y = I$.

Множество $X= \otimes\{Vi.\ i \in Ix,\}$ называется входным объектом, а множество $Y=\otimes\{Vi, i \in Iy\}$ - выходным объектом системы. Тогда система S определяется отношением

$$S \subset X* У \qquad \textbf{(3.3)}$$

и называется системой «вход — выход» («черный ящик»).

Если S является функцией

$$S : X \rightarrow Y. \qquad \textbf{(3.4)}$$

то система называется функциональной.

Временные системы в терминах «ВХОД — ВЫХОД»

Множество моментов времени. Первая часть первого предположения о характере функционирования систем гласит: система функционирует во времени. Множество моментов времени t, в которые рассматривается функционирование системы, обозначим T, $t \in T$. Множество T будем считать подмножеством множества действительных чисел. В частности, оно может быть конечным или счетным. В зависимости от характера множества T различают: дискретное, непрерывное и дискретно-непрерывное время. На практике часто представляют интерес только такие множества T, элементы которых располагаются в изолированных точках числовой оси. В этом случае говорят, что система функционирует в дискретном времени, например контактные схемы, конечные автоматы, вычислительные устройства ЭВМ и т. д. Вместо моментов времени t_0, t_1 , ... часто пишут ряд натуральных чисел 0, 1,2, ..., которые называются тактами.

Множество T представляет собой множество некоторого (конечного или бесконечного) интервала числовой оси. В этом случае говорят, что система функционирует в непрерывном времени, например механические и электрические системы, системы, рассматриваемые в теории автоматического регулирования, и т. д.

Не исключены случаи, когда множество T имеет дискретно-непрерывный характер: на одних, интервалах числовой прямой моменты $t \in T$ заполняют их целиком, а на других — располагаются в изолированных точках. Например: 1) метеорологическая ракета при нахождении в состоянии готовности функционирует в непрерывном времени, а при запуске (при работе автомата пуска) можно условно считать, что работает в дискретном времени (реле времени работает дискретно в смысле выдачи команд исполнительным органом по тактам); 2) процесс производства автомобилей на конвейере; конвейер движется непрерывно, а готовые автомобили сходят с него в дискретные моменты времени.

Входные сигналы системы. Второе и третье предположения о характере функционирования систем направлены на описание взаимодействия системы с внешней средой. На вход системы могут поступать входные сигналы $x \in X$, где X — множество входных сигналов системы. Входной сигнал, поступивший в момент времени te T, обозначается x(t).

Возвратимся к примеру с выпуском предприятием однотипных изделий (часто их называют одно-продуктовое производство). В такой системе готовность в момент t, i-го изделия (автомобиля, часов, велосипеда, телевизора и т. д.) можно описать как поступление очередного сигнала $x(t_i) = 1$. Здесь множество X состоит из одного элемента $x=1$. Если принять за $X=0$ сигнал, когда очередное изделие не готово, а за $X=1$, когда оно готово, то можно считать, что $X=\{0, 1\}$, и в систему входной сигнал поступает в каждый момент $t \in T$. В случае, когда в моменты t_i оказываются готовыми одновременно несколько изделий (на заводе несколько конвейерных линий), например $0 \le x \le x_{max}$, то множество X — совокупность целых чисел $X=\{O,1, ..., Xmax\}$.

Входные сигналы могут описываться некоторым набором характеристик. Например, если входными сигналами АСУ аэродромом считать самолеты, поступившие в зону аэродрома, то каждый из них может быть описан: 1) координатами точки взлета (I, a, ε) (I-наклонная дальность, a - азимут и ε - угол места); 2) вектором скорости (I, a, ε); 3) признаками, характеризующими тип самолета (V), массу груза (G), требованиями к аэродромному обслуживанию (δ) и т. д.

В общем случае будем предполагать, что входной сигнал $X_1 \in Xi$, где X, — заданные множества (i= 1, n).

Прямое произведение $X=X_1 \times X_2 \times .... \times .Xn$ называется пространством входных сигналов. Xi - элементарные оси, входной сигнал x представляет собой точку пространства X, описываемую координатами x_1, x_2, ..., xn. В общем случае $X \subset X$.

При исследовании сложных систем приходится оперировать с группами входных сигналов, поступающих в моменты времени $t_l<t_2<\ldots<t_k$. Будем предполагать, что множеству X принадлежит и пустой сигнал $x_\varnothing$, означающий отсутствие сигнала в момент t, $x(t)=x_\varnothing$.

Рассмотрим отображение $x=L(t)$, сопоставляющее каждому $t \in T$ некоторый сигнал $x \in X$ (отображение f: $T \to X$). Обозначим через T^L множество моментов времени $T^L \subset T$, такое, что для любого $t' \in T^L$ справедливо $L(t_l) \ne x_\varnothing$. Отображение $x=L(t)$ будем называть входным процессом систем, а совокупность упорядоченных пар (t', x) для всех $t' \in T^L$ (где $x=L(t')$) — входным сообщением.

Чтобы задать конкретный входной процесс $x = L(t)$, достаточно указать соответствующее ему входное сообщение $(t, x_L)_T$.

Интервал времени $t_1<t<t_2$ будем обозначать (t_1,t_2), а полуинтервалы $t_1<t<t_2$ и $t_1<t<t_2$ — через $(t_1,t_2]$ и $[t_1,t_2)$, соответственно $t_1 \le t \le t_2$ — через $[t_1,t_2]$.

Введем понятие «сужение отображения». Пусть множество X имеет область определения отображения $y=f(x)$. Отображение $y=g(x)$ с областью определения X* является сужением отображения f(x) на множество X* в том и только в том случае, когда $X^* \subset X$ и $g(x) = f(x)$ для каждого $x \in X^*$.

Сужение отображения $x = L(t)$ на множество $T\cap(t_1,t_2]$ будем называть фрагментом входного процесса, соответствующим полуинтервалу $(t_1,t_2]$, а совокупность упорядоченных пар (t', x) для всех $t' \in T^L\cap(t_1,t_2)$, где $x=L(t')$ — отрывком входного сообщения, поступающим в систему за полуинтервал $(t_1,t_2]$ и обозначать $(t_1,x_L]_{t1}^{t2}$

Для конечного множества $T^L\cap(t_1,t_2]$, например $t_1,t_2,\ldots,t_k$, входное сообщение имеет вид

$$(t_1, x_1; t_2, x_2; ...; t_k, x_k).$$

Множество всевозможных входных сообщений обозначим $\{(t, X_L)_T\}$. Оно определяется множеством входных процессов вида $x=L(t)$, допускаемых условиями функционирования системы. К множеству $\{(t, X_L)_T\}$ будем причислять и пустое входное сообщение $(t, x_L)_T = \varnothing$, для которого $T^L = 0$.

Кроме того, множество $\{(t, X_L)_T\}$ должно удовлетворять еще одному требованию, связанному с сочленением входных сообщений. Пусть $(t, X_{L1})_T$ и $(t, X_{L2})_T$ сообщения из множества $\{(t, X_L)_T\}$. Пусть, далее, $t,<t_2<t_2$; t_{1t} t_2, $t_3\in T$. Образуем отрывки сообщений $(t, X_{L1}]^{T2}{}_{T1}$ и$(t, X_{L2}]^{T3}{}_{T2}$. Совокупность упорядоченных пар (t^*, x^*), где

$$t^* \in (\{T^{L_1} \cap (t_1,t_2]\} \cup \{T^{L_2} \cap (t_2,t_3)\});$$
$$x^* = \begin{cases} L_1(t^*)t^* для \subset \{T^{L_1} \cap (t_1;t_2]\}; \\ L_2(t^*) для t^* \subset \{T^{L_2} \cap (t_2;t_3]\}, \end{cases}$$

можно рассматривать как отрывок $(t, X_L]_{T1}{}^{T3}$, некоторого сообщения $(t, X_{L}\text{-})_T$, образовавшийся в результате сочленения отрывков $(t,X_{L1}]^{t3}$ и $(t, X_{L2}]^{T3}{}_{T2}$. Сочленение любого числа отрывков входных сообщений из множества $\{(t, X_L)_T]$ представляет собой отрывок некоторого входного сообщения, принадлежащего этому множеству.

Выходные сигналы системы. Система способна выдавать выходные сигналы $y\in Y$, где Y — множество выходных сигналов системы. Выходной сигнал, выдаваемый системой в момент времени $t\in T$, обозначается $y(i)$.

Если выходной сигнал у описывается набором характеристик $y_1, y_2, \ldots y_m$, таких, что $y\in Y_j$, $j=l, m$, Y_j — заданные множества, то прямое произведение

$Y=Y_1\times Y_2\times \ldots \times Ym$

называется пространством выходных сигналов системы. По аналогии с входным процессом введем понятие выходного процесса $y=N(t)$, а также определим выходное сообщение $(t, y_N)_T$ и его отрывок $(t, y_N]_{t1}{}^{t2}$ на полуинтервале $(t_1, t_2]$.

На этом можно считать исчерпанной формальную интерпретацию второго и третьего предположений о характере функционирования систем.

Глобальное состояние и глобальная реакция системы. Пусть для системы S множество ее состояний Z, а функция R: $(X \times Z) \rightarrow Y$ такова, что

$$(x, y) \in S \Rightarrow (\exists_z)[R(x,y)=y.$$

Тогда Z называют множеством или объектом глобальных состояний системы, а элементы множества $z \in Z$ — глобальными состояниями системы. Функция R называется глобальной реакцией системы S. При этом ни на Z, ни на R не налагается никаких дополнительных условий. В случаях, когда глобальную реакцию системы нельзя определить на всем произведении X x Z, то R оказывается частичной функцией. Таким образом, R можно называть глобальной реакцией системы только тогда, когда она не является частичной функцией. В противном случае ее называют частичной глобальной реакцией.

Абстрактные линейные системы. Хотя многие понятия теории систем можно определить, опираясь исключительно на понятие общей системы (3.1), получение содержательных математических результатов становится возможным только после введения дополнительных структур. Таким дополнительным понятием является понятие линейности систем.

Пусть A — некоторое поле, X и Y — линейные алгебры над A, S — отношение, $S \subset X \times Y$, причем S непусто. Пусть также

$s \in S$ и $s' \in S \Rightarrow s + s' \in S$

$s \in S$ и $a \in A \Rightarrow a_x \in S$

где «+» обозначает (внутреннюю) операцию сложения в $X \times Y$, а через a_x, обозначен результат (внешней) операции умножения на скаляр. Тогда S называется (абстрактной) полной линейной системой.

В соответствии с современной терминологией алгеброй называют множество вместе с некоторыми конечными операциями, а линейной алгеброй, в частное внутренней и одной внешней операциями, удовлетворяющими аксиомам векторного пространства. Операция «+» и умножения на скаляр определяются на $X \times Y$ естественным образом:

$(x1,y1)+(x2,y2)=(x1+x2, y1+y2)$

$a(x,y)= (ax,ay) \subset X \times Y, a \in A$.

В теории линейных систем фундаментальную роль играет следующая теорема.

Пусть X и У — линейные алгебры над одним и тем же полем A. Система $S \subset X \times Y$ является линейной в том и случае, когда найдется такая глобальная реакция $R : X \times Я \to Y$, что

1. Z есть линейная алгебра над A;
2. существует пара таких линейных отображений

$R1: Z \to Y$ и $R2: X \to Y$,

что для всех $(x,y) \in X \times Y$

$R(x,z) = R1(x)+R2(z)$

Отображение R называют линейной глобальной реакцией системы тогда, и только тогда, когда

1. R согласуется с S, т.е.

$$(x, y) \in S \Rightarrow (\exists_z)[R(x,y)=y.$$

2. Z является линейной алгеброй над полем A скаляров линейных алгебр X и У.

Существуют два таких линейных отображений $R1: Z \to Y$ и $R2: X \to Y$, что для любых $(x,y) \in X \times Y$

$R(x, z) = R1(x)+R2(z)$

В этом случае Z называют линейным объектом глобальных состояний системы, отображение $R_1 : Z \to У$ — глобальной реакцией на состояние, а $R_2 : X \to Y$ — глобальной реакцией на вход.

Оглавление